*Int. J. Heat Mass Transfer.* Vol. 28, No. 6, pp. 1097–1104, 1985
Printed in Great Britain
0017-9310/85 $3.00+0.00
Pergamon Press Ltd.

# Etude théorique du couplage convection–conduction en convection libre laminaire sur une plaque plane verticale

JEAN TIMMA et JACQUES-PIERRE PADET
Groupe de Thermomécanique, Faculté des Sciences, 51062 Reims, France

(*Reçu le* 20 *Septembre* 1984)

**Résumé**—On propose une extension de la méthode de Blasius pour l'étude des problèmes de transferts thermiques couplés bidimensionnels et permanents en convection naturelle sur une plaque plane verticale. La condition à la limite thermique considérée est une température uniforme sur la face extérieure de la plaque. La conduction longitudinale dans la plaque est négligée. Cette méthode permet d'établir une nouvelle corrélation pour le calcul du coefficient d'échange en transferts thermiques couplés. Des comparaisons avec les résultats d'un autre travail effectué sur le même sujet montrent la validité de la méthode utilisée.

## 1. INTRODUCTION

L'ÉTUDE du comportement dynamique d'un ballon de stockage d'eau chaude intégré dans un chauffe-eau électro-solaire montre que l'effet conductif de la paroi métallique a une grande influence sur la stratification et les déperditions thermiques du ballon. En effet, durant la phase de relaxation, la conduction pariétale longitudinale se traduit par une destruction de la stratification naturelle et une accélération de l'homogéneisation des températures. Quant à la conduction pariétale transversale, elle se manifeste par un accroissement des déperditions thermiques du ballon. Cette constatation nous suggère l'idée que le coefficient de transfert thermique est sensible à la conduction pariétale transversale. Vu les dimensions du ballon, la courbure de la paroi a été négligée. Nous l'avons donc assimilée à une plaque plane verticale. C'est pourquoi dans cette étude, nous allons procéder à une approche théorique de l'influence du couplage sur le coefficient d'échanges thermiques en convection libre laminaire sur une plaque plane verticale.

Ce problème a déjà été abordé en particulier par Zinnes [1] et Miyamoto *et al.* [2].

Zinnes [1] a montré qu'en convection libre laminaire sur une plaque plane verticale de conductance finie, le rapport des conductivités thermiques $\lambda_s/\lambda_f$ a une influence importante sur la distribution du coefficient d'échange convectif et sur le champ des températures à l'interface solide–fluide.

Dans une étude concernant un seul fluide ($Pr = 0{,}7$), Miyamoto *et al.* [2] aboutit à la conclusion que si la face qui n'est pas en contact avec le fluide est maintenue à une température uniforme, la conduction longitudinale dans la plaque affecte très peu le champ des températures à l'interface solide–fluide et le coefficient de convection.

Nous nous proposons ici de procéder à une étude théorique du problème du couplage à partir de la méthode de Blasius. Nous nous baserons particulièrement sur les travaux de Gosse [3] qui étend cette méthode au couplage convection–conduction en convection forcée laminaire sur plaque plane horizontale. L'influence des paramètres $(\lambda_s/\lambda_f)(l/b)$, $Pr$ et du nombre de Grashof $Gr_l$ sur le coefficient de convection sera mise en évidence.

## 2. EQUATIONS DE REFERENCE

### 2.1. *Rappels*

Le fluide est supposé isovolume et de propriétés physiques constantes. L'écoulement est permanent et sans gradient de pression. La plaque est soumise sur sa face extérieure à une température $T_0$ constante. Conformément à l'analyse de Miyamoto *et al.* [2], la conduction longitudinale dans la plaque est donc négligée de telle sorte que l'équation d'énergie dans la plaque est réduite à :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0; \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad -b < y \leqslant 0. \tag{1}$$

L'équation (1) associée à la condition de continuité des flux à l'interface ($y = 0$) fournit la condition à la limite :

$$\lambda_s[T(x,0) - T_0]/b = \lambda_f\left(\frac{\partial T_f}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{2}$$

### 2.2. *Problème dynamique*

La fig. 1 montre le modèle physique et le système de coordonnées. La convection naturelle bidimensionnelle et laminaire sur une plaque plane verticale est décrite habituellement par les équations de la couche limite :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = g\beta(T_f - T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{4}$$

**NOMENCLATURE**

| | |
|---|---|
| $a$ | diffusivité thermique du fluide |
| $b$ | épaisseur de la plaque |
| $F$ | fonction de Blasius |
| $\mathbf{g}$ | accélération de la pesanteur |
| $Gr_x$ | nombre de Grashof local, $g\beta(T_0-T_\infty)x^3/\nu^2$ |
| $Gr_l$ | nombre de Grashof en $x = l$, $g\beta(T_0-T_\infty)l^3/\nu^2$ |
| $h(x)$ | coefficient local de transfert, le couplage étant pris en compte |
| $h_0(x)$ | coefficient local de transfert, le couplage étant négligé |
| $l$ | hauteur de la plaque |
| $Nu_x$ | nombre de Nusselt, $h(x)\cdot x/\lambda_f$ |
| $Nu_{x0}$ | nombre de Nusselt sans couplage, $h_0(x)\cdot x/\lambda_f$ |
| $Pr$ | nombre de Prandtl, $\nu/a$ |
| $q$ | densité de flux de chaleur locale |
| $T_0$ | température imposée sur la face extérieure de la plaque |
| $T_f(x,y)$ | température du fluide, $T_\infty$ température au loin ($y \to \infty$) |
| $U, V$ | composantes de la vitesse du fluide |
| $x, y$ | coordonnées tangente et normale à la plaque : $x = 0$ au bord inférieur ; $y = -b$ sur la face extérieure ; $y = 0$ sur l'interface fluide–solide. |

Symboles grecs

| | |
|---|---|
| $\beta$ | coefficient volumique de dilatation thermique |
| $\lambda_s, \lambda_f$ | conductivités thermiques du solide et du fluide |
| $\nu$ | viscosité cinématique du fluide. |

auxquelles sont associées les conditions aux limites :

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad y = 0, \quad U(x,0) = V(x,0) = 0 \tag{5}$$

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad y \to \infty, \quad U(x,\infty) = 0. \tag{6}$$

En convection forcée laminaire sur une plaque plane horizontale, les équations dynamiques aux dérivées partielles peuvent être transformées en équations aux dérivées totales en adoptant la solution de Blasius. Celle-ci repose sur l'hypothèse d'affinité des profils de vitesse dans la couche limite exprimée par la condition :

$$\frac{U}{U_\infty} = \psi(\eta) \tag{7a}$$

où $\eta$ est une variable indépendante définie par :

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \tag{7b}$$

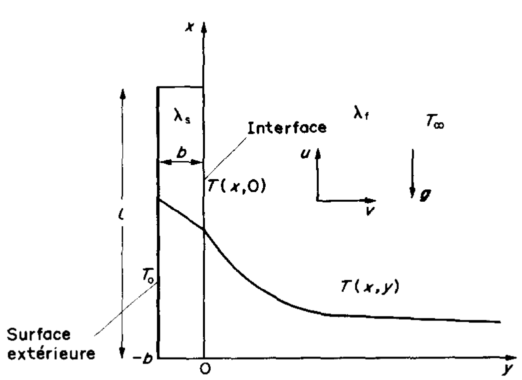


FIG. 1. Plaque plane verticale et système de coordonnées.

[$\delta(x)$ étant une longueur caractéristique dans la couche limite].

A la suite de certains auteurs [4, 7], nous admettrons que cette hypothèse reste valable en convection libre laminaire sur une plaque plane verticale ; on obtient alors :

$$\eta = C\frac{y}{x^{1/4}} \tag{7c}$$

avec :

$$C = \left[\frac{g\beta(T_0-T_\infty)}{4\nu^2}\right]^{1/4}. \tag{7d}$$

L'épaisseur de la couche limite $\delta_0(x)$ est de l'ordre de :

$$\delta_0(x) \sim \delta(x) = \frac{x^{1/4}}{C}. \tag{7e}$$

En passant par l'intermédiaire d'une fonction de courant, on obtient à partir de l'équation (3) :

$$U = 4\nu C^2\sqrt{x}F'(\eta) \tag{8a}$$

$$V = \nu C x^{-1/4}(\eta F' - 3F). \tag{8b}$$

Posons d'autre part :

$$\frac{T_f(x,y)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \theta(\eta). \tag{8c}$$

En reportant (8a)–(8c) dans (4), on aboutit à une équation aux dérivées totales en $\eta$ :

$$F''' + 3FF'' - 2F'^2 + \theta = 0 \tag{9}$$

à laquelle sont associées les conditions aux limites dynamiques :

$$F'(0) = F(0) = 0 ; \quad F'(\infty) = 0. \tag{10}$$

2.3. *Problème thermique*

Examinons maintenant l'équation d'énergie en couche limite:

$$U\frac{\partial T_f}{\partial x}+V\frac{\partial T_f}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \tag{11}$$

avec les conditions aux limites thermiques:

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad y\to\infty:\quad T_f(x,\infty)=T_\infty \tag{12}$$

$$0\leqslant x\leqslant l, y=0: T(x,0)-T_0=\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot b\left(\frac{\partial T_f}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{13}$$

La condition à la limite (13), compte tenu de (7e) et de (8), s'écrit encore:

$$\theta(x,0)=1+\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot b\delta^{-1}(x)\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}. \tag{14}$$

Sachant que la solution d'une équation générale aux dérivées partielles dépend intrinséquement des conditions aux limites imposées sur le contour, la relation (14) suggère la recherche d'une solution à variables séparées du type [3]:

$$\theta=\theta(x,\eta)=\theta_0(\eta)+\varphi(x)\theta_1(\eta). \tag{15}$$

Nous devons donc résoudre l'équation suivante:

$$U\frac{\partial\theta}{\partial x}+V\delta^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=a\delta^{-2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} \tag{16a}$$

en tenant compte des conditions aux limites:

$0\leqslant x\leqslant l,\quad \eta=0;$

$$\theta(x,0)=1+\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot b\delta^{-1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} \tag{16b}$$

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad \eta\to\infty;\quad \theta(x,\infty)=0. \tag{16c}$$

Le report des relations (7), (8) et (15) dans (16a) conduit à l'équation:

$$\theta_0''+3PrF\theta_0'+\varphi\left[\theta_1''+Pr\left(3F\theta_1'-4x\frac{\varphi'}{\varphi}F'\theta_1\right)\right]=0 \tag{17}$$

dans laquelle les accentuations symbolisent les dérivations par rapport à $\eta$ pour $F, \theta_0, \theta_1$ et par rapport à $x$ pour $\varphi$. L'équation (17) concernant deux fonctions indépendantes peut être décomposée en deux:

d'une part:

$$\theta_0''+3PrF\theta_0'=0 \tag{18a}$$

avec

$$\theta_0(1)=1;\quad \theta_0(\infty)=0 \tag{18b}$$

d'autre part:

$$\theta_1''+Pr\left(3F\theta_1'-4x\frac{\varphi'}{\varphi}F'\theta_1\right)=0 \tag{19a}$$

avec

$$\theta_1=\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0};\quad \theta_1(\infty)=0. \tag{19b}$$

Les relations (14) et (15) nous montrent que $(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=0}$ ne doit pas être fonction de $x$ car $\theta_1$ ne l'est pas. Nous avons en plus:

$$\theta'(x,0)=\theta_0'(0)+\varphi(x)\theta_1'(0). \tag{20}$$

Avec la condition ci-dessus et la relation (20), on a enfin:

$$\theta_1'(0)=0 \tag{21}$$

et

$$\theta_1(0)=\theta_0'(0). \tag{22}$$

2.3. *Couplage conduction–convection*

La condition à l'interface (14) et l'expression (15) avec les conditions (18b), (21) et (22) conduisent à l'expression de $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot b\cdot C\cdot x^{-1/4}.$$

C'est cette fonction $\varphi(x)$ qui décrit le couplage en un point $x\neq 0$. Pour $\varphi(x)=0$, nous retrouvons les équations et les conditions aux limites habituelles de la convection libre sur plaque verticale isotherme et de conductance infinie. Par la suite nous appellerons $\varphi(x)$ *fonction de couplage.* Sa dérivée est:

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{4}\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot b\cdot C\cdot x^{-5/4}$$

d'où:

$$-x\frac{\varphi'}{\varphi}=+\frac{1}{4}$$

et l'équation (19a) devient:

$$\theta_1''+Pr(3F\theta_1'+F'\theta_1)=0 \tag{23a}$$

avec

$$\theta_1(0)=\theta_0'(0) \tag{23b}$$

$$\theta_1'(0)=0 \tag{23c}$$

$$\theta_1(\infty)=0. \tag{23d}$$

Cependant, en recherchant des solutions de la forme (15), nous perdons le bénéfice de l'hypothèse d'affinité dans le problème dynamique. En effet, le report de (15) dans (9) enlève aux solutions leur propriété affine et rend le calcul très long car il faut alors résoudre un système d'équations pour chaque valeur de $x$. Nous avons contourné cet obstacle en remplaçant dans (15) $\varphi(x)$ par sa valeur moyenne calculée sur toute la hauteur de la plaque, soit $\varphi_M$ définie par:

$$\varphi_M=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot\frac{b}{l}\,Gr_l^{1/4}. \tag{24}$$

Un calcul numérique effectué pour des valeurs de $x$ allant de $0{,}01l$ à $l$ dans le cas où $Pr=0{,}708$, nous a permis de vérifier que la substitution de $\varphi_M$ à $\varphi(x)$ entraine une erreur inférieure à 1% sur les solutions thermiques et dynamiques pour plus de 98% de la hauteur de la plaque située au-dessus de l'origine $x=0$.

Dans le domaine de validité de l'étude, c'est-à-dire pour :

$$0{,}01l < x \leqslant l \quad \text{et} \quad \varphi(x)\theta_1(0) > -1 \qquad (25)$$

nous avons procédé à cette substitution qui a permis un gain important en temps de calcul. Dans la région voisine du bord inférieur de la plaque c'est-à-dire pour :

$$0 < x \leqslant 0{,}01l$$

l'insuffisance de la méthode s'explique par le fait que les équations de la couche limite (3), (4) et (11) ne sont plus valables lorsque $x$ tend vers 0 et que la fonction de couplage croit très rapidement dans cette région.

La substitution de $\varphi_M$ à $\varphi(x)$ dans (15) et le report de l'équation obtenue dans (9) conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} F''' + 3FF'' - 2F'^2 + \theta_0 + \varphi_M\theta_1 &= 0 \\ \theta_0'' + 3PrF\theta_0' &= 0 \\ \theta_1'' + Pr(3F\theta_1' + F'\theta_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (26)$$

auquel on associe les conditions aux limites

$$\begin{aligned} &F(0) = F'(0) = 0; \quad F'(\infty) = 0 \\ &\theta_1(0) = \theta_0'(0) \\ &\theta_0(0) = 1; \quad \theta_0(\infty) = 0. \end{aligned} \qquad (27)$$

## 3. RESOLUTION NUMERIQUE

Nous avons procédé à une résolution numérique des équations (26) et des conditions aux limites (27). Nous allons d'abord rappeler le principe de la résolution avant de présenter les résultats du calcul.

Nous avons dans un premier temps transformé le système (26) d'ordre trois et les conditions aux limites (27) en un système d'ordre deux en posant $G = F'$. Les équations (26) deviennent alors :

$$\begin{aligned} G &= F' \\ G'' + 3FG' - 2G^2 + \theta_0 + \varphi_M\theta_1 &= 0 \\ \theta_0'' + 3PrF\theta_0' &= 0 \\ \theta_1' + Pr(3F\theta_1' + G\theta_1) &= 0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Les conditions aux limites (27) sont transformées de même :

$$\begin{aligned} &G(0) = 0; \quad G(\infty) = 0 \\ &F(0) = 0 \\ &\theta_0(0) = 1; \quad \theta_0(\infty) = 0 \\ &\theta_1'(0) = 0; \quad \theta_1(\infty) = 0 \\ &\theta_1(0) = \theta_0'(0). \end{aligned} \qquad (29)$$

Les différences finies sont utilisées pour la discrétisation du système (28) et des conditions aux limites (29). Le schéma itératif est celui de la méthode de Gauss–Seidel non-linéaire qui est une méthode d'approximations successives. Les calculs sont effectués en supposant la composante $U$ de la vitesse nulle en dehors de la couche limite.

Au moyen de cette méthode de calcul, nous avons essayé de voir si le paramètre $\theta_0'(0)$ peut s'exprimer de façon simple en fonction de $Pr$. Pour cela, nous nous sommes inspirés de deux formules usuelles en convection libre laminaire non couplée, et nous avons posé ; soit :

$$\frac{\theta'(0)}{\sqrt{2}} = -C_1(Pr)\frac{Pr^{1/2}}{(0{,}952+Pr)^{1/4}} \qquad (30a)$$

soit

$$\frac{\theta_0'(0)}{\sqrt{2}} = -C_2(Pr)Pr^{1/4}. \qquad (30b)$$

Ce faisant, nous introduisons deux paramètres $C_1(Pr)$ et $C_2(Pr)$ dont nous avons calculé les valeurs numériques en fonction de $Pr$ (Tableaux 1 et 2) pour différentes valeurs du produit $(\lambda_s/\lambda_f)(l/b)$.

On peut remarquer que dans les cas envisagés, les grandeurs $C_1(Pr)$ sont très proches les unes des autres et différent entre elles de moins de 10% en valeur relative. Il semble donc possible d'admettre qu'elles sont indépendantes de $Pr$. Nous prendrons donc en première approximation comme valeur unique des grandeurs $C_1(Pr)$ la constante

$$C_1 = 0{,}465. \qquad (30c)$$

Par contre, nous constatons que $C_2(Pr)$ croît de façon sensible avec $Pr$, et ne peut en aucun cas être assimilée à une constante.

Tableau 1. Distribution de $C_1(Pr)$ et de $C_2(Pr)$ pour $Gr_l = 2{,}7 \times 10^6$

| $\frac{\lambda_s}{\lambda_f}\cdot\frac{l}{b}$ | $Pr$ | 0,708 | 1 | 1,5 | 2 | 2,97 | 7,02 | 13,6 | 51 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1667 | $C_1$ | 0,485 | 0,478 | 0,479 | 0,478 | 0,478 | 0,482 | 0,487 | 0,503 | 0,512 |
| | $C_2$ | 0,522 | 0,540 | 0,565 | 0,579 | 0,594 | 0,620 | 0,639 | 0,667 | 0,681 |
| 333 | $C_1$ | 0,476 | 0,470 | 0,467 | 0,466 | 0,466 | 0,466 | 0,467 | 0,469 | 0,469 |
| | $C_2$ | 0,513 | 0,531 | 0,551 | 0,564 | 0,579 | 0,602 | 0,612 | 0,623 | 0,624 |
| 167 | $C_1$ | 0,467 | 0,461 | 0,456 | 0,453 | 0,451 | 0,445 | 0,441 | 0,428 | 0,416 |
| | $C_2$ | 0,504 | 0,520 | 0,538 | 0,548 | 0,561 | 0,575 | 0,579 | 0,568 | 0,553 |

Tableau 2. Distribution de $C_1(Pr)$ et de $C_2(Pr)$ pour $Gr_l = 10^9$

| $\frac{\lambda_s}{\lambda_f}\cdot\frac{l}{b}$ | $Pr$ | 0,708 | 1 | 1,5 | 2 | 2,97 | 7,02 | 13,6 | 51 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | $C_1$ | 0,473 | 0,466 | 0,462 | 0,460 | 0,459 | 0,457 | 0,490 | 0,508 | 0,518 |
| | $C_2$ | 0,509 | 0,526 | 0,545 | 0,557 | 0,571 | 0,590 | 0,643 | 0,674 | 0,680 |
| 700 | $C_1$ | 0,473 | 0,467 | 0,462 | 0,457 | 0,451 | 0,444 | 0,491 | 0,508 | 0,517 |
| | $C_2$ | 0,510 | 0,527 | 0,545 | 0,553 | 0,562 | 0,570 | 0,643 | 0,670 | 0,687 |
| 500 | $C_1$ | 0,470 | 0,462 | 0,451 | 0,445 | 0,438 | 0,425 | 0,491 | 0,508 | 0,514 |
| | $C_2$ | 0,507 | 0,521 | 0,532 | 0,538 | 0,545 | 0,550 | 0,643 | 0,674 | 0,684 |

Il apparait donc que l'expression (30a) est la plus commode à utiliser. Elle nous évite de reprendre les calculs pour les cas de nombres de Prandtl non traités ici tout en nous permettant de suivre avec une assez bonne précision les évolutions du champ de température à la surface de la plaque et du coefficient de convection.

## 4. COEFFICIENT D'ECHANGE LOCAL

La densité de flux de chaleur à l'interface solide–fluide est donnée par :

$$q = -\lambda_f\left(\frac{\partial T_f}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{31a}$$

De la relation (15) et de la définition de la fonction de couplage $\varphi(x)$, nous tirons :

$$\begin{aligned} q &= -\lambda_f C x^{-1/4}(T_0-T_\infty)\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} \\ &= -\lambda_f C x^{-1/4}(T_0-T_\infty)\theta'_0(0). \end{aligned} \tag{31b}$$

Nous pouvons remarquer que ce flux de chaleur est le même que dans le cas où le couplage est négligé (les deux faces de la plaque sont maintenues à une température constante $T_0$) [4]. Cette transformation s'explique par la condition à la limite $\theta'_1(0) = 0$ qui réduit le flux de chaleur à l'interface solide–fluide au seul flux de chaleur que l'on aurait en l'absence de couplage. D'où, bien que la plaque présente une certaine résistance thermique, le flux de chaleur n'est pas modifié. Puisque le flux de chaleur reste inchangé lorsque l'on tient compte du couplage, il est nécessaire que le coefficient local de convection $h(x)$ soit plus grand qu'en absence de couplage car $T(x,0) \leqslant T_0$ lorsque le couplage est pris en compte.

Sachant que :

$$h(x) = q/[T(x,0)-T_\infty] \quad \text{et} \quad Nu_x = \frac{h(x)\cdot x}{\lambda_f}$$

nous avons donc ici :

$$\begin{aligned} Nu_x &= -Cx^{3/4}\cdot(T_0-T_\infty)\theta'_0(0)/[T(x,0)-T_\infty] \\ &= -\frac{\theta'_0(0)}{\sqrt{2}}[\theta(x,0)]^{-1}Gr_x^{1/4}. \end{aligned} \tag{32}$$

En l'absence de couplage, $[\theta(x,0)]^{-1} = 1$ car $\varphi(x) = 0$ ; d'où

$$Nu_{x_0} = -\frac{\theta'_0(0)}{\sqrt{2}}Gr_x^{1/4}. \tag{33}$$

Introduisons le rapport :

$$h_* = Nu_* = \frac{Nu_x}{Nu_{x_0}} = \frac{h(x)}{h_0(x)} = [\theta(x,0)]^{-1}$$

$$h_* = \left[1+\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{\theta'_0(0)}{\sqrt{2}}\cdot Gr_x^{1/4}\right]^{-1}. \tag{34}$$

Le report de (30a) dans (34) fait apparaître au second membre de (34) un nouveau nombre sans dimension, analogue au nombre de Brun défini par Luikov [5] et repris par Gosse [3] en convection forcée, et que nous désignerons par $\gamma(x)$. Posons :

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{\theta'_0(0)}{\sqrt{2}}\cdot Gr_x^{1/4} = -C_1\cdot\gamma(x). \tag{35a}$$

Soit, d'après (30a) :

$$\gamma(x) = \frac{\lambda_f}{\lambda_s}\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{Pr^{1/2}}{(0{,}952+Pr)^{1/4}}\cdot Gr_x^{1/4}. \tag{35b}$$

Dans la présente étude, la valeur de ce nombre est limitée car $h_*$ doit rester positif. Cette condition s'exprime par l'inégalité suivante :

$$C_1\cdot\gamma(x) < 1 \tag{36a}$$

ou bien

$$\gamma(x) < \frac{1}{C_1}. \tag{36b}$$

En supposant la condition (36b) remplie, nous pouvons donc écrire les champs de température à l'interface et en tout point du fluide sous la forme :

$$\theta(x,0) = 1-C_1\cdot\gamma(x) \tag{37}$$

et

$$\theta(x,\eta) = \theta_0(\eta)-C_1\cdot\gamma(x)\cdot\frac{\theta_1(\eta)}{\theta_1(0)}. \tag{38}$$

Tableau 3. Distribution de température $\theta(x, 0)$ à l'interface en fonction de $Pr$ pour $Gr_l = 2{,}7 \times 10^6$

| $\frac{\lambda_s}{\lambda_f} \cdot \frac{l}{b}$ | $Pr$ | $x/l$ (%) 1 | 11 | 21 | 31 | 51 | 71 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1667 | 0,708 | 0,9723 | 0,9848 | 0,9870 | 0,9882 | 0,9896 | 0,9904 | 0,9912 |
| | 7,02 | 0,9415 | 0,9679 | 0,9726 | 0,9752 | 0,9781 | 0,9798 | 0,9815 |
| | 13,6 | 0,9292 | 0,9611 | 0,9669 | 0,9700 | 0,9735 | 0,9756 | 0,9776 |
| | 51 | 0,8971 | 0,9435 | 0,9519 | 0,9563 | 0,9614 | 0,9645 | 0,9675 |
| 333 | 0,708 | 0,8641 | 0,9254 | 0,9365 | 0,9424 | 0,9491 | 0,9532 | 0,9571 |
| | 7,02 | 0,7171 | 0,8446 | 0,8678 | 0,8801 | 0,8941 | 0,9025 | 0,9107 |
| | 13,6 | 0,6605 | 0,8136 | 0,8414 | 0,8561 | 0,8729 | 0,8830 | 0,8929 |
| | 51 | 0,5197 | 0,7363 | 0,7756 | 0,7964 | 0,8202 | 0,8345 | 0,8485 |
| 167 | 0,708 | 0,7342 | 0,8540 | 0,8758 | 0,8873 | 0,9005 | 0,9084 | 0,9161 |
| | 7,2 | 0,4614 | 0,7042 | 0,7484 | 0,7717 | 0,7984 | 0,8144 | 0,8301 |
| | 13,6 | 0,3608 | 0,6490 | 0,7014 | 0,7291 | 0,7608 | 0,7798 | 0,7983 |
| | 51 | 0,1261 | 0,5201 | 0,5917 | 0,6296 | 0,6729 | 0,6989 | 0,7243 |

De même, le nombre de Nusselt s'écrit :

$$Nu_x = \frac{Nu_{x_0}}{1 - C_1 \cdot \gamma(x)}. \tag{39}$$

La solution d'un problème couplé de convection et de conduction peut donc être exprimée de façon très simple par les corrélations (37)–(39) en fonction d'un seul paramètre sans dimension qui est le nombre $\gamma(x)$ défini par (35b).

## 5. ANALYSE DES RESULTATS

Nous avons présenté dans les Tableaux 3 et 4 le champ de température $\theta(x, 0)$ à l'interface solide–fluide. Les éléments des Tableaux 5 et 6 montrent l'influence des paramètres $(\lambda_s/\lambda_f)\,(l/b)$, $Gr_l$ et $Pr$ sur le rapport $h_*$ des coefficients de convection. Ils permettent de décider pour chaque cas, et suivant la précision cherchée, si on prend en compte le couplage ou si on le néglige.

Comme nous pouvons le remarquer, le champ de température $\theta(x, 0)$ à la surface de la plaque est une fonction croissante de la cote $x$, ce qui explique le comportement opposé du rapport $h_*$ des coefficients de convection en fonction de $x$. En effet, $h_*$ est maximum vers le bas de la plaque.

La décroissance de $\theta(x, 0)$ avec $Pr$ entraine une augmentation de $h_*$ avec $Pr$ à une cote $x$ donnée. De même, $h_*$ augmente avec le nombre de Grashof $Gr_l$.

La différence fondamentale entre la prise en compte ou non du couplage concerne l'influence exercée simultanément par les conductivités thermiques des deux milieux (solide et fluide) sur $\theta(x, 0)$ et $h_*$ :

En l'absence de couplage, ces deux grandeurs n'interviennent pas dans les échanges thermiques, alors que, lorsque le couplage est pris en compte, leur influence sur la nature des échanges se fait par l'intermédiaire du nombre sans dimension $\gamma(x)$. Rappelons que cette influence peut être modifiée par

Tableau 4. Distribution de température $\theta(x, 0)$ à l'interface en fonction de $Pr$ pour $Gr_l = 10^9$

| $\frac{\lambda_s}{\lambda_f} \cdot \frac{l}{b}$ | $Pr$ | $x/l$ (%) 1 | 11 | 21 | 31 | 51 | 71 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 0,708 | 0,8028 | 0,8917 | 0,9078 | 0,9164 | 0,9252 | 0,9320 | 0,9378 |
| | 1,5 | 0,7457 | 0,8603 | 0,8812 | 0,8922 | 0,9048 | 0,9124 | 0,9197 |
| | 2,97 | 0,6839 | 0,8264 | 0,8523 | 0,8660 | 0,8817 | 0,8911 | 0,9002 |
| | 7,02 | 0,5947 | 0,7774 | 0,8107 | 0,8282 | 0,8483 | 0,8604 | 0,8721 |
| 700 | 0,708 | 0,7183 | 0,8453 | 0,8684 | 0,8806 | 0,8955 | 0,9029 | 0,9111 |
| | 1,5 | 0,6367 | 0,8005 | 0,8303 | 0,8460 | 0,8640 | 0,8640 | 0,8854 |
| | 2,97 | 0,5563 | 0,7563 | 0,7927 | 0,8119 | 0,8339 | 0,8471 | 0,8600 |
| | 7,02 | 0,4375 | 0,6911 | 0,7372 | 0,7616 | 0,7895 | 0,8062 | 0,8225 |
| 500 | 0,708 | 0,6081 | 0,7848 | 0,82169 | 0,8339 | 0,8533 | 0,8650 | 0,8763 |
| | 1,5 | 0,5035 | 0,7274 | 0,7680 | 0,7896 | 0,8142 | 0,8289 | 0,8434 |
| | 2,97 | 0,3967 | 0,6687 | 0,7181 | 0,7443 | 0,7742 | 0,7921 | 0,8097 |
| | 7,02 | 0,2463 | 0,5861 | 0,6479 | 0,6805 | 0,7179 | 0,7403 | |

Tableau 5. Distribution du rapport $h_*$ des coefficients de convection le long de la plaque en fonction de $Pr$ pour $Gr_l = 2{,}7 \times 10^6$

| $\frac{\lambda_s}{\lambda_f} \cdot \frac{l}{b}$ | $Pr$ | $x/l$ (%) 1 | 11 | 21 | 31 | 51 | 71 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1667 | 0,708 | 1,028 | 1,015 | 1,013 | 1,011 | 1,010 | 1,009 | 1,008 |
| | 2 | 1,041 | 1,022 | 1,028 | 1,017 | 1,015 | 1,013 | 1,012 |
| | 13,6 | 1,076 | 1,040 | 1,034 | 1,030 | 1,027 | 1,024 | 1,022 |
| | 51 | 1,114 | 1,059 | 1,050 | 1,045 | 1,040 | 1,036 | 1,033 |
| 333 | 0,708 | 1,157 | 1,080 | 1,067 | 1,067 | 1,053 | 1,049 | 1,044 |
| | 2 | 1,239 | 1,118 | 1,099 | 1,099 | 1,078 | 1,071 | 1,065 |
| | 13,6 | 1,513 | 1,229 | 1,188 | 1,168 | 1,145 | 1,132 | 1,119 |
| | 51 | 1,923 | 1,358 | 1,289 | 1,255 | 1,219 | 1,198 | 1,178 |
| 167 | 0,708 | 1,361 | 1,170 | 1,141 | 1,126 | 1,110 | 1,100 | 1,901 |
| | 2 | 1,600 | 1,259 | 1,212 | 1,189 | 1,163 | 1,148 | 1,134 |
| | 13,6 | 2,771 | 1,540 | 1,425 | 1,371 | 1,314 | 1,282 | 1,252 |
| | 51 | 7,929 | 1,922 | 1,689 | 1,588 | 1,485 | 1,430 | 1,380 |

celle du paramètre descriptif $l/b$ de la plaque dans le produit $(\lambda_s/\lambda_f)\cdot(l/b)$.

La croissance de $\theta(x,0)$ et la décroissance de $h_*$ avec le produit $(\lambda_s/\lambda_f)\cdot(l/b)$ s'expliquent par le fait que pour $l/b$ fixé et $\lambda_s/\lambda_f$ grand, la plaque tend à se comporter comme une plaque isotherme car sa conductance devient très grande. Pour conserver le flux de chaleur à l'interface lorsque $\theta(x,0)$ décroit, $h_*$ doit donc augmenter. Cette dernière remarque est d'autant plus importante que de nos jours, on utilise des matériaux peu conducteurs et d'épaisseur telle que la valeur du produit $(\lambda_s/\lambda_f)\cdot(l/b)$ modifie profondément le champ $\theta(x,0)$ et peut donc obliger à tenir compte du couplage.

Nous avons enfin comparé nos résultats à ceux que Miyamoto *et al.* [2] a obtenu dans un cas particulier ($Pr = 0{,}7$) en utilisant une méthode de résolution directe des équations dynamiques et thermiques par différences finies. L'excellente concordance entre les deux apporte une confirmation quant à la validité de la méthode à laquelle nous avons eu recours.

## 6. CONCLUSION

Nous avons montré que la méthode de Blasius peut être adaptée à l'étude du couplage conduction–convection en convection libre laminaire sur une plaque plane verticale de conductance finie et qu'elle n'exige que des calculs relativement simples et rapides. Elle permet également d'établir une corrélation où figure un nouveau nombre sans dimension $\gamma(x)$ jouant le même rôle que le nombre de Brun en convection forcée laminaire.

Tableau 6. Distribution du rapport $h_*$ des coefficients de convection le long de la plaque en fonction de $Pr$ pour $Gr_l = 10^9$

| $\frac{\lambda_s}{\lambda_f} \cdot \frac{l}{b}$ | $Pr$ | $x/l$ (%) 1 | 11 | 21 | 31 | 51 | 71 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 0,708 | 1,245 | 1,121 | 1,101 | 1,091 | 1,079 | 1,072 | 1,066 |
| | 1,5 | 1,340 | 1,162 | 1,134 | 1,120 | 1,105 | 1,096 | 1,087 |
| | 2,97 | 1,462 | 1,210 | 1,173 | 1,154 | 1,134 | 1,122 | 1,110 |
| | 7,02 | 1,681 | 1,286 | 1,233 | 1,207 | 1,178 | 1,162 | 1,146 |
| 700 | 0,708 | 1,392 | 1,182 | 1,151 | 1,135 | 1,117 | 1,107 | 1,097 |
| | 1,5 | 1,570 | 1,249 | 1,204 | 1,181 | 1,157 | 1,143 | 1,129 |
| | 2,97 | 1,797 | 1,322 | 1,261 | 1,231 | 1,199 | 1,180 | 1,162 |
| | 7,02 | 2,285 | 1,446 | 1,356 | 1,312 | 1,266 | 1,240 | 1,215 |
| 500 | 0,708 | 1,644 | 1,274 | 1,224 | 1,199 | 1,171 | 1,156 | 1,141 |
| | 1,5 | 1,985 | 1,374 | 1,301 | 1,266 | 1,228 | 1,206 | 1,185 |
| | 2,97 | 2,52 | 1,495 | 1,392 | 1,343 | 1,291 | 1,262 | 1,235 |
| | 7,02 | 4,060 | 1,706 | 1,543 | 1,469 | 1,392 | 1,350 | 1,311 |

## REFERENCES

1. A. E. Zinnes, The coupling of conduction with laminar natural convection from a vertical flat plate with arbitrary surface heating, *J. Heat Transfer* **92**, 528–535 (1970).
2. M. Miyamoto, J. Sumikawa, T. Akiyoshi and T. Nakamura, Effects of axial heat conduction in a vertical flat plate on free convection heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 1545–1553 (1980).
3. J. Gosse, Analyse simplifiée du couplage conduction–convection pour un écoulement à couche limite laminaire sur une plaque plane, *Rev. Gén. Therm.* **228**, 967 (1980).
4. L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, pp. 266–271. Editions Mir, Moscou (1971).
5. A. V. Luikov, Conjugate heat transfer problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 257 (1974).
6. E. Eckert and R. M. Drake, *Free Convection, Heat and Mass Transfer*, pp. 311–322. McGraw-Hill, New York (1959).
7. J. F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques, pp. 253–261, Technique et documentation (1980).

## THEORETICAL INVESTIGATION OF THE CONDUCTION–CONVECTION COUPLING IN FREE LAMINAR CONVECTION FROM A VERTICAL FLAT PLATE

**Abstract**—An extension of Blasius method is used to study a steady two-dimensional conjugate heat-transfer problem of free convection from a vertical flat plate. The thermal boundary condition considered here is a constant temperature at the outside surface of the plate. The axial conduction in the flat plate is neglected. This method permits one to establish a new correlation for the calculation of the local exchange coefficient in coupled heat transfer. For that, we use a new non-dimensional parameter similar to the Brun's number in forced convection. Comparisons with the results of another work on the same theme shows the validity of the method.

## THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER GEKOPPELTEN WÄRMELEIT- UND KONVEKTIONSVORGÄNGE BEI LAMINARER FREIER KONVEKTION AN EINER SENKRECHTEN WAND

**Zusammenfassung**—Eine Erweiterung der Blasius-Methode wird verwendet, um ein stationäres zweidimensionales Wärmeübertragungsproblem bei freier Konvektion an einer senkrechten, ebenen Wand zu untersuchen. Als thermische Randbedingung wird eine konstante Temperatur an der abgewandten Wandoberfläche gewählt. Die axiale Wärmeleitung in der Wand wird vernachlässigt. Diese Methode erlaubt es, eine neue Korrelation für die Berechnung des örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten bei Wärmeleitung und Konvektion aufzustellen. Dazu wird ein neuer dimensionsloser Parameter verwendet, ähnlich der Brun-Zahl bei der erzwungenen Konvektion. Vergleiche mit den Ergebnissen einer anderen Arbeit zum selben Thema zeigen die Gültigkeit der Methode.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КОНВЕКЦИИ ПРИ СВОБОДНО-ЛАМИНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

**Аннотация**—Для изучения стационарной двумерной сопряженной задачи теплообмена свободной конвекцией около вертикальной плоской пластины применен модифицированный метод Блазиуса. Рассматриваемое в работе тепловое граничное условие задавалось в виде постоянной температуры на внешней поверхности пластины. Аксиальной проводимостью в плоской пластине пренебрегали. Метод позволяет получить новое уравнение для расчета коэффициента локального теплообмена при сложном теплообмене. С этой целью использовался новый безразмерный параметр, схожий с числом Брюна для вынужденной конвекции. Сравнение полученных результатов с данными, приведенными в другой работе по этой же тематике, подтвердило достоверность используемого метода.